INDICE E ARGOMENTI PRINCIPALI

LEGENDA

[A.1]	→ argomento trattato nell'esame di Analisi Matematica 1 o Matematica Generale
[A.2]	→ argomento trattato nell'esame di Analisi Matematica 2
[M.M]	→ argomento trattato nell'esame di Metodi Matematici
[AG]	→ argomento trattato nell'esame di Algebra e Geometria o Matematica Generale
[F.1]	→ argomento trattato nell'esame di Fisica Generale 1
[F.2]	→ argomento trattato nell'esame di Fisica Generale 2
[T.S]	→ argomento trattato nell'esame di Teoria dei Segnali
[F.A]	→ argomento trattato nell'esame di Teoria dei sistemi o Fondamenti di Automatica
[I.C]	→ argomento trattato nell'esame di Introduzione ai circuiti o Elettrotecnica

DEF:	→ definizione	***LTI***	→ Lineare tempo invariante
PROP:	→ proposizione	***PEC***	→ Conduttore perfetto
OSS:	→ osservazione	**FD**	→ Dominio di Fourier
HP:	→ ipotesi	**PD**	→ Dominio dei fasori (Phasor)
TH:	→ tesi		
DIM:	→ dimostrazione		
$C.D.V.$	→ come volevasi dimostrare: conclusione dimostrazione		
COND SUFF:	→ Condizione sufficiente	**TX**	→ Trasmissione
COND NECC:	→ Condizione necessaria	**RX**	→ Ricezione

INCOMPATIBILITA' DEL SISTEMA DI MAXWELL

Prese le equazioni di Maxwell nel dominio del tempo in forma differenziale (esplicitando sia le sorgenti indotte che le impresse):

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{e}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial \vec{b}(\vec{r},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{h}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial \vec{d}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{j}(\vec{r},t) + \vec{j}_0(\vec{r},t) \\ \nabla \cdot \vec{d}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) + \rho_0(\vec{r},t) \\ \nabla \cdot \vec{b}(\vec{r},t) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi 3 *equazioni* *vettoriali* e 1 scalare (la III equazione, per via di ρ) Consideriamo la I:

$$\nabla \times \vec{e}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{b}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Effettuiamo la divergenza ad ambi i membri:

$$\nabla \cdot [\nabla \times \vec{e}(\vec{r},t)] = \nabla \cdot \left[-\frac{\partial \vec{b}(\vec{r},t)}{\partial t}\right]$$

Ricordando che la divergenza del rotore di un campo vettoriale è nulla, si ha:

$$(\#) \quad \nabla \cdot \left[-\frac{\partial \vec{b}(\vec{r},t)}{\partial t}\right] = 0$$

Questo risultato ci fa notare che la divergenza di $\vec{b}$ è una costante. Se ci focalizziamo sulla IV equazione di Maxwell notiamo che non aggiunge informazione a questa ma bensì può essere vista come una *condizione iniziale* del sistema di equazioni differenziali **[A.2]**.

Inoltre, il risultato $(\#)$ ci dice già che la quantità $\nabla \cdot \vec{b}(\vec{r},t)$ è una costante nulla poiché, da un punto di vista fisico, il campo elettromagnetico prima di essere indotto da una sorgente, quindi in una condizione iniziale, è nullo (ed essendo costante, rimane nullo).

In conclusione, si afferma che la IV equazione è linearmente dipendente dalle altre.

Quindi, nel sistema di equazioni di Maxwell abbiamo **7 *equazioni scalari indipendenti*** tra loro (un equazione vettoriale è un uguaglianza tra vettori che, per essere uguali, devono avere ogni componente uguale, in questo caso 3).

Tuttavia, nello stesso sistema, vi sono 5 *variabili* *vettoriali* e 1 scalare che sono:

$$\vec{e}(\vec{r},t) \;\; ; \;\; \vec{d}(\vec{r},t) \;\; ; \;\; \vec{h}(\vec{r},t) \;\; ; \;\; \vec{b}(\vec{r},t) \;\; ; \;\; \vec{j}(\vec{r},t) \;\; ; \;\; \rho(\vec{r},t)$$

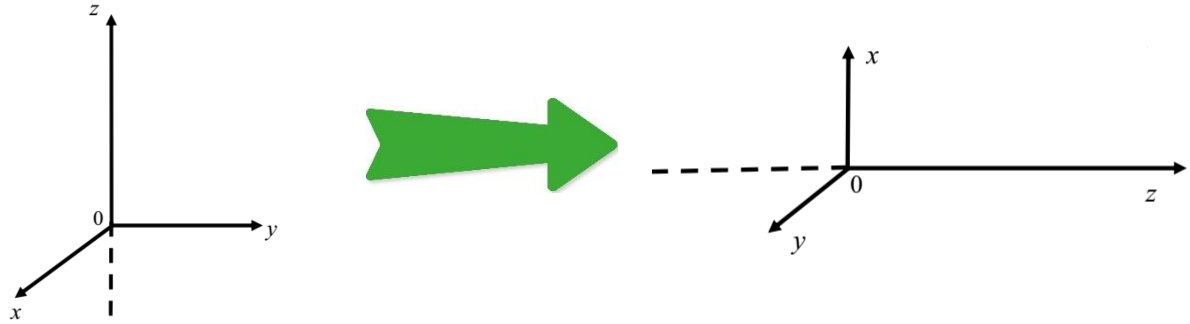
Ogni vettore è composto da 3 componenti, di conseguenza nelle equazioni di Maxwell abbiamo **16 *incognite scalari***.

Da ***Cramer***, sappiamo che un sistema per essere compatibile (soluzioni uniche) deve avere il numero di equazioni indipendenti pari a quello delle incognite **[A.G.]**. Le 9 equazioni scalari mancanti sono le ***relazioni costitutive*** (prossimo paragrafo).

ONDE PIANE

ONDE PIANE IN MEZZI SENZA PERDITE

Dato un sistema levogiro, ruotiamolo di 90° affinchè l'asse z sia la componente longitudinale :



Consideriamo un mezzo ***isotropo, locale*** *(non dispersivo nel tempo e nello spazio)*, ***omogeneo*** (*tempo e spazio invariante*) e ***senza perdite*** ($\sigma = 0$), avremo le seguenti relazioni costitutive:

$$\begin{cases} \vec{d}(\vec{r},t) = \varepsilon \vec{e}(\vec{r},t) \\ \vec{b}(\vec{r},t) = \mu \vec{h}(\vec{r},t) \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

Assumendo che le sorgenti sono al di fuori dello spazio considerato ($\vec{J} = 0, \quad \rho = 0$ e $\vec{J}_0 = 0, \quad \rho_0 = 0$), le equazioni di Maxwell in forma differenziale si possono quindi riscrivere come (questo è un esempio noto: i telefonini ricevono campi da sorgenti remote):

$$source\ free \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \vec{e}(\vec{r},t) = -\mu \dfrac{\partial \vec{h}(\vec{r},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{e}(\vec{r},t) = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{e}(\vec{r},t)}{\partial t} \\ \varepsilon \nabla \cdot \vec{e}(\vec{r},t) = 0 \\ \mu \nabla \cdot \vec{h}(\vec{r},t) = 0 \end{cases}$$

Scritto così, il sistema di Maxwell presenta due equazioni differenziali (I e II) con le corrispettive condizioni iniziali (III e IV), dove la III è la condizioni iniziale della II e la IV è la condizione iniziale della I (si dimostra tramite la divergenza del rotore di un campo che è nulla).

Scriviamo il campo elettromagnetico tramite coordinate cartesiane:

$$\vec{e}(\vec{r},t) = \vec{e}_x(\vec{r},t)\hat{\imath}_x + \vec{e}_y(\vec{r},t)\hat{\imath}_y + \vec{e}_z(\vec{r},t)\hat{\imath}_z = \vec{e}_x(x,y,z,t)\hat{\imath}_x + \vec{e}_y(x,y,z,t)\hat{\imath}_y + \vec{e}_z(x,y,z,t)\hat{\imath}_z$$
$$\vec{h}(\vec{r},t) = \vec{h}_x(\vec{r},t)\hat{\imath}_x + \vec{h}_y(\vec{r},t)\hat{\imath}_y + \vec{h}_z(\vec{r},t)\hat{\imath}_z = \vec{h}_x(x,y,z,t)\hat{\imath}_x + \vec{h}_y(x,y,z,t)\hat{\imath}_y + \vec{h}_z(x,y,z,t)\hat{\imath}_z$$

Inoltre, il rotore del campo vale:

$$\nabla \times \vec{e}(\vec{r},t) = \left(\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}_x + \left(\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x}\right)\hat{\imath}_y + \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y}\right)\hat{\imath}_z$$
$$\nabla \times \vec{h}(\vec{r},t) = \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}_x + \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\right)\hat{\imath}_y + \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\right)\hat{\imath}_z$$

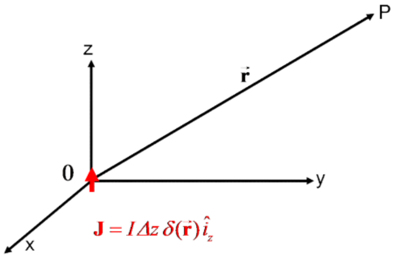
Ora, supponiamo che la derivata rispetto a x e rispetto a y del campo sia nulla, ovvero i valori del campo non variano lungo la x e lungo la y.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

DIPOLO ELEMENTARE ELETTRICO

Un *dipolo elementare elettrico* è un tipo di antenna indicata da un sorgente impulsiva dove la densità di corrente $\vec{J}$ ha un verso:

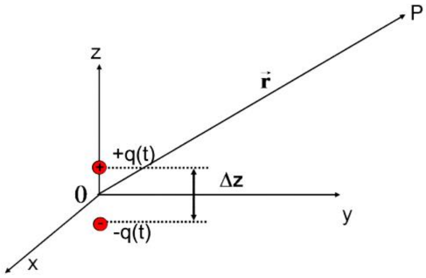
$$dipolo\ elementare \rightarrow \boxed{\vec{J} = I\Delta z\delta(\vec{r})\hat{\imath}_z} = I\Delta z\delta(x)\delta(y)\delta(z)\hat{\imath}_z$$



Questa sorgente è un caso particolare poiché, inserita in ingresso in un sistema per calcolare il campo, è come inserire un impulso a meno di una costante. Matematicamente, qualsiasi sorgente può essere vista come sovrapposizione di sorgenti impulsive. Quindi il dipolo è l'elemento fondamentale di qualsiasi antenna.

In fisica, un dipolo è formato da due quantità di cariche $q(t)$ che possono variare nel tempo (cariche che pulsano). Quindi, dato che $q(t)$ ha un andamento sinusoidale nel tempo, posso esprimere il suo fasore Q. Si afferma che, nel dominio spettrale, l'intensità di corrente I vale:

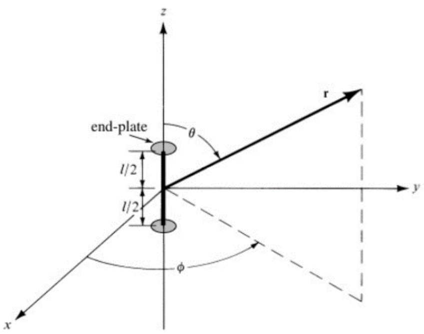
$$\boxed{I = j\omega Q}$$



Bisogna ricordare che, dall'analisi, la delta di Dirac $\delta(z)$ è una funzione studiata nel senso delle distribuzioni, quindi non esiste fisicamente ma rimane un oggetto molto potente anche dal punto di vista ingegneristico. Infatti, la delta di Dirac può essere vista come una $\mathrm{rect}\left(\frac{z}{\Delta z}\right)$ quando $\Delta z \rightarrow 0$ (filo sottile) **[M.M]**:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \mathrm{rect}\left(\frac{z}{\Delta z}\right) = \Delta z\delta(z) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{J} = I\delta(x)\delta(y)\mathrm{rect}\left(\frac{z}{\Delta z}\right)\hat{\imath}_z$$

Purtroppo, in un filo sottile è impossibile imprimere una intensità di corrente I costante (nello spazio, è un fasore) e diversa da zero dato che alle estremità la corrente sarà sicuramente nulla perché entra in gioco la ***I legge di Kirchhoff***. È possibile evitare ciò, inserendo due piatti alle estremità del filo (così il filo non presenta "nodi"). Questo filo sottile che presenta dei piatti alle estremità è detto ***filo Hertziano*** (nello specifico il filo deve essere più piccolo di $\lambda/50$, dove λ è la lunghezza d'onda di $i(t)$).



PARAMETRI DI ANTENNA IN <u>TRASMISSIONE</u>

Per realizzare un'antenna che risponda a determinate specifiche, occorre controllarne le i parametri, i quali sono delle caratteristiche che ne sintetizzano il comportamento.

L'antenna ha due modalità operative: la ***trasmissione (Tx)*** e la ***ricezione (Rx)***, le quali sono fortemente legati tra loro. I parametri si classificano in base a quale modalità operativa è associata.

Concentriamoci, per ora, sui parametri di trasmissione:

- ***Altezza efficace*** *in trasmissione* $\vec{l}(\theta, \varphi)$
  - *Pattern di radiazione*
  - *Lobi del pattern di radiazione*
  - *Larghezza di fascio*
- *Direttività*
- *Guadagno*
- *Resistenza*
- *Circuito equivalente dell'antenna di trasmissione*
- *Impedenza e resistenza in input*

ALTEZZA EFFICACE IN TRASMISSIONE DEL DIPOLO E DELLA SPIRA

L'altezza efficace l'abbiamo già vista ed è una dei parametri in trasmissione più importante. Due antenne con stessa altezza efficace (e stessi input) irradieranno stesso campo, mentre due antenne con diversa altezza efficace no:

$$\vec{l}(\theta, \varphi) = l_\theta(\theta, \varphi)\hat{\imath}_\theta + l_\varphi(\theta, \varphi)\hat{\imath}_\varphi$$

L'altezza efficace del dipolo e della spira si ricavano dalle espressioni dei loro campi elettromagnetici (dove nella relazione della spira ho sostituito $1 = j \cdot (-j)$ per riportarmi nella stessa forma del dipolo):

Elementary electrical dipole	$\mathbf{E}(\mathbf{\vec{r}}) = \frac{j\zeta I}{2\lambda}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\Delta z \sin\vartheta \hat{i}_\vartheta$ $\zeta\mathbf{H}(\mathbf{\vec{r}}) = \hat{i}_r \times \mathbf{E}(\mathbf{\vec{r}})$	$\mathbf{l}(\vartheta, \varphi) = \Delta z \sin\vartheta \hat{i}_\vartheta$
Small loop antenna	$\mathbf{E}(\mathbf{\vec{r}}) = \frac{j\zeta I}{2\lambda}\frac{e^{-j\beta r}}{r}(-j\beta\Delta S)\sin\vartheta \hat{i}_\varphi$ $\zeta\mathbf{H}(\mathbf{\vec{r}}) = \hat{i}_r \times \mathbf{E}(\mathbf{\vec{r}})$	$\mathbf{l}(\vartheta, \varphi) = -j\beta\Delta S \sin\vartheta \hat{i}_\varphi$

Ricordando che, per ogni antenna, vale la relazione:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{j\zeta I}{2\lambda}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\vec{l}(\theta, \varphi)$$

Si ricava facilmente l'altezza efficace $\vec{l}(\theta, \varphi)$. Preso il dipolo, nella *direzione di massima propagazione* $(\sin\theta = 1)$, l'altezza efficace in trasmissione $\vec{l}(\theta, \varphi)$ corrisponde all'altezza effettiva Δz dell'antenna inoltre non dipende da φ perché, nel dipolo, il problema assume una simmetria di tipo azimutale (lungo φ):

$$dipolo\ (direzione\ di\ massima\ propagazione \Rightarrow \sin\theta = 1) \rightarrow \boxed{\vec{l}(\theta) = \Delta z}$$